John Casey について (数学史の研究)

田村, 三郎

数理解析研究所講究録
1130巻 2000年 8-12

John Caseyについて

大阪産業大学　田村 三郎 (Saburo Tamura)

I 履歴について

ラテン読みで、Joseph B. Casey と書かれている論文もある。

1820.5.12 南 Irelandの Cork州の Kilkenny で生まれた。生地で初等教育を受け、Mitchelstown の上級学校に進学した。

the Board of National Educationの教師となり、数年後 Kilkennyの Central Model Schoolの headmasterとなっている。余暇に数学を勉強し、自らが得た結果(ケイジーの定理など)を、Salmon博士らに送った。

1858　Salmon博士(1819-1904)と Townsend教授のすすめで、Trinity College に入った。

1859　sizarship (補助金)を受けた。

1861　science scholarship(奨学金)を受けた。

1862　degreeを得た。

1862-68　Oxford, Cambridge, Dublin Messenger of Mathematics の co-editor

数年間　*Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* の Dublin特派員

1866　Member of the Royal Irish Academy

数年後　Member of the Council に選ばれ、the Committee of Scienceで活躍した。
5年間 Voice-President であった。

1869　Dublin大学から the degree of LL.D., *honoris causa* を得た。

1875　Fellow of the Royal Society

1878　Academyから Cunningham Gold Medal が与えられた。

1878　the Mathematical Section of the British Association の Secretaries の一人となった。

1878　Member of the Scientific Sociey of Brussels

1881　Royal University の基金から Fellowship に選ばれた。(死ぬまで)

1883.9　Catholic University の the Chair of Higher Mathematics となった。

1883.10　Trinity College の数学教授として招かれ、光栄に思ったが、Catholic University に留まることを望んでいた。

1883.12　Catholic University の Professor of Mathematical Physics となった。

1884　Member of the Societe Mathematique de France

1885　Royal University から distinction を授与された。

1887　Corresponding Member of the Royal Society of Science, Liege

1891.1.3 Dublinで死去。

II 論文リスト

(1) Memoir on Bicircular Quartics (1869)

(2) Memoir on Cyclides and Sphero-Quartics (1871)

(3) Memoir on a new Form of Tangential Equation (1877)

(4) Two Memoirs on the Equations of Circles (1866 and 1878)

(5) On the Harmonic Hexagon of a Triangle (1886)

これらの論文は以下の雑誌に発表されている。

A) *Transactions and Proceedings of the Royal Irish Academy*

B) *Quarterly Journal of Mathematics*

C) *Hermathena*

D) *Messenger of Mathematics*

E) *Annali di Matematica*

F) *Philosophical Transactions*

G) *Proceedings of the Royal Society*

III 著書リスト

(1) *On Cubic Transformations* (1880)

(2) *Element of Euclid Books I–VI.* (1881)

(3) *A Treatise on the Analutical Geometry* (1885)

(4) *A Sequel to the 1st 6 Books of the Element of Euclid.* (1886)
高橋・山下共訳「ケージー氏幾何学続編」(1909)

(5) *A Treatise on Elementary Trigonometry* (2版,1887)
長沢訳「初等平面三角法」(1888)
東野訳「初等平面三角法教科書」(1892)
原浜訳「ケージー氏平面新三角法」(1896)
上野講述「ケージー氏平面三角法講義」(1908)

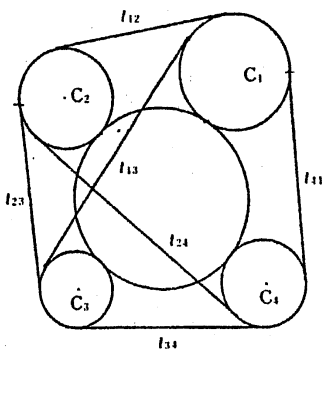
(6) *A Treatise on Plane Trigonometry* (1888)

(7) *A Treatise on Spherical Trigonometry* (1889)

IV ケイジーの定理

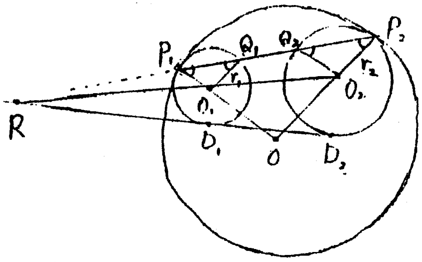
半径 r の円に半径 r_1、r_2、r_3、r_4 の4円がすべて外接(内接)しているとき、2円 r_i と r_j の共通外接線の長さを t_{ij} とすれば、$t_{12}t_{34} + t_{23}t_{41} = t_{13}t_{24}$ となる。(1857)

これはトレミーの定理の拡張である。



ケイジー自身は著作(1)Book VIの中で、一つの円

に二つの円が内接している場合を補助定理として証明し、これとトレミーの定理を使ってケイジーの定理を証明している。



補助定理(2円が他の円に内接しているとき)

半径 r の 円Oに半径 r_1, r_2 の円 O_1, O_2が点P_1, P_2で内接しており、2円O_1, O_2の共通外接線の長さを t とすると

$$rt = P_1P_2\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)}$$

補助定理の証明

P_1P_2と円$O_1.O_2$との交点をQ_1, Q_2とすると,$\triangle OP_1P_2, \triangle O_1P_1Q_1, \triangle O_2Q_2P_2$は相似だから

$P_1P_2 : P_2Q_1 = OP_1 : OO_1 = r : (r-r_1)$, $P_1P_2 : P_1Q_2 = OP_2 : OO_2 = r : (r-r_2)$

この両式を掛けて

$(P_1P_2)^2 : P_1Q_2 \cdot P_2Q_1 = r^2 : (r-r_1)(r-r_2)$

ところで、$P_1Q_2 \cdot P_2Q_1 = t^2 \cdots\cdots\cdots *$

が成り立つので補助定理が証明される。

そこで＊を証明しよう。$r_1 = r_2$とすれば、＊は簡単に証明されるので、$r_1 \neq r_2$ と仮定する。この仮定のもとで、共通外接線とO_1O_2との交点をRとすると、R, P_1, P_2 は一直線上にある。また、2円O_1, O_2の共通外接線の接点をD_1, D_2とすれば

$RD_1 : RD_2 = RQ_1 : RP_2$ だから、$t : RD_2 = P_2Q_1 : RP_2$。

同様にして $t : RD_2 = P_1Q_2 : RQ_2$。

ゆえに $t^2 : (RD_2)^2 = P_1Q_2 \cdot P_2Q_1 : RP_2 \cdot RQ_2$。

一方、方冪の定理より $(RD_2)^2 = RP_2 \cdot RQ_2$ がいえるので＊が成立する。

補助定理の別証

$\angle O_1OO_2 = \theta$ とおくと、$(P_1P_2)^2 = 2r^2 - 2r^2\cos\theta$ であるから

$$(O_1O_2)^2 = (OO_1)^2 + (OO_2)^2 - 2OO_1 \cdot OO_2\cos\theta = (r-r_1)^2 + (r-r_2)^2 - 2(r-r_1)(r-r_2)\cos\theta$$

$$= (r-r_1)^2 + (r-r_2)^2 - 2(r-r_1)(r-r_2)(1-(P_1P_2)^2/2r^2) = (r_1-r_2)^2 + (r-r_1)(r-r_2)(P_1P_2)^2/r^2$$

同様にして、半径Rの円が2円O_1, O_2にQ_1, Q_2で内接していると

$(O_1O_2)^2 = (r_1-r_2)^2 + (1-r_1/R)(1-r_2/R)(Q_1Q_2)^2$であるから、

$$(1-r_1/R)(1-r_2/R)(Q_1Q_2) = (r-r_1)(r-r_2)(P_1P_2)/r$$

ここでRを∞ にすると、Q_1Q_2 はt に近づくので、$t^2 = (r-r_1)(r-r_2)(P_1P_2)^2/r^2$として補助定理は証明された。

ケイジーの定理の証明

トレミーの定理より $P_1P_2 \cdot P_3P_4 + P_2P_3 \cdot P_4P_1 = P_1P_3 \cdot P_2P_4$ であるから、両辺に$\sqrt{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)(r-r_4)}/r^2$をかけ、補助定理を使うとケイジーの定理が得られる。

V 和算における余弦定理と正弦定理

△ABCにおいて、AからBCにおろした垂線の足を H とし

CH ＝ x, BH = y とすると

$2ax = a^2+b^2-c^2$, $2ay = a^2+c^2-b^2$

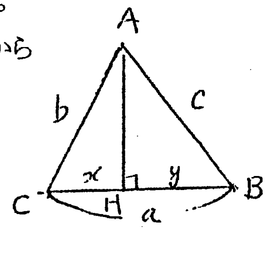
である。和算家たちは、∠Cや∠Bが鈍角のときもこの公式は成立し、x や y の値が負となることを知っていた。

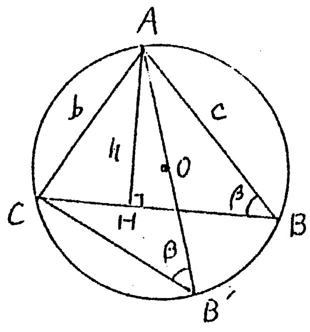
△ABCの外接円の半径をRとし、A からBC におろした垂線の長さを h とすると　$bc = 2Rh$　である。

なぜなら　△ABH ∽ △AB'C　であるから

$c : h = 2R : b$

がいえるからである。





VI 和算家たちのトレミーの定理の証明

次の証明は、有馬頼徸(1714-1783)の「拾璣算法」(1766)の中に見られるものである。

円に内接する四辺形ABCDがある。円周上に A'D = AB となるようにA'をとる。すると A'B ＝AD である。同じく A'B = CB' となるように、B'を円周上にとると BB' // A'Cである。B およびD からA'Cにおろした垂線の長さをそれぞれ h, k とすると、V より

BC・CB'＝ $2Rh$,　A'D・DC ＝ $2Rk$

である。(R は外接円の半径)

BC・CB' + A'D・DC = $2R(h+k)$

ところが、△DBB' から、BD・DB' = $2R(h+k)$

∴ BC・CB' + A'D・DC = BD・DB'

ここで、CB'=A'B＝AD, A'D =AB, DB'= AC であるから

BC・AD + AB・DC = BD・AC

として、トレミーの定理は証明される。

補角をなす角の余弦の和は0 となることを利用する証明もある。

VII 和算家による補助定理(2円が他の円に外接しているとき)

円の共通接線のことを和算では傍斜と呼び、共通接線の研究を傍斜術と言っていた。特にその基本となるのが3円のこの補助定理の場合で、三円傍斜として引用している。

半径 r の円に2円O_1,O_2が P_1,P_2で外接している。

$P_1P_2 = a$,　$O_1O_2 = d$

とし、P_1,O_1からOO_2におろした垂線の足を H, K とすると、上のVより

OH = $(2r^2 - a^2)/2r$

OK = $((r+r_1)^2 + (r+r_2)^2 - d^2)/2(r+r_2)$

ところで、OH : OK = OP_1 : OO_1 = $r : (r+r_1)$

だから $(2r^2-a^2)(r+r_1)(r+r_2) = ((r+r_1)^2 + (r+r_2)^2 - d^2)\ r^2$

$(d^2-(r_1-r_2)^2)r^2=(r+r_1)(r+r_2)a^2$

2円O_1,O_2の共通接線の長さをtとすると

$rt=\sqrt{(r+r_1)(r+r_2)}\,a$

が得られる。

この三円傍斜を使って、ケイジーの定理を証明する方法は和算家もケイジーも全く同じである。

VIII 初出ケイジーの定理

Casey自身が論文として発表したのは *Proceedings of the Irish Academy* 9 (1866), *396-423* であるが、小倉訳「サーモン解析幾何学」には、1857年とされている。これはCaseyがSalmon博士と個人的に文通した際に書き記していた時を示している。しかしながら、和算家たちは少なくとも文政12・13年すなわち、1829・1830年頃にはこれを知っていたというので、初出は日本のほうが30年ばかり早い。

白石長忠閲、池田貞一編「写本数理無尽蔵」(文政13年1830)は公式集であるから、証明はないが、上の三円傍斜と同時に、このケイジー定理を載せている。上で述べたような証明は、吉田為幸「写本変極算法」などにあるという。年代は不明であるが、この証明は「数理無尽蔵」と同じ頃得られたものであろう。おそらく三円傍斜である補助定理を得たと同時に、これを使ってケイジーの定理を獲得したのであろう。これらはいずれも写本であるが、刊本としては喜多川孟敦「算法礎」(1862)がある。

参考文献

(1) 岩田至康「幾何学大辞典」(槙書店)

(2) 三上義夫「文化史上より見たる日本の数学」の佐々木力による注(岩波文庫)(1999)

(3) May : Bibliography and Research Manual of the History of Mathematics

(4) Fang : Mathematicians

(5) Anon : *Procs. of the London Math. Soc.* 22.(1891)

(6) 林鶴一 : Un theorem de Casey en Mathematiques Japonaises (東北数学雑誌 1。(1912))

(7) 三上義夫 : 日本数学上ニ於ケルCASEYノ定理 (東北数学雑誌 15。(1919))

(8) Zacharias : Verschiedene Abhandlungen Der Caseysche Satz. *Jasb. d. deu Mathematiker-Vereinigung.* 52-2(1943)

(9) 日本学士院「明治前日本数学史」

(10) 「日本の数学100年史」

(11) 小倉金之助 : 数学教育史

(12) 深川英俊 : 日本の幾何

(13) 中村幸夫 : 和算に現れたケージーの定理(群馬県和算研究会会報19)

これまで日本では、ケイジーの著作が割合多く翻訳されており、ケイジーの定理が和算との関係から注目されていたにも拘わらず、ケイジーの伝記については(1)か(2)の中で僅か触れられている程度であった。今回(3)の文献リストをもとに文献(5)を知ることができたので、主としてその内容を紹介した。また、ケイジー自身の定理の証明については、小寺裕氏がインターネットから得られたものを利用させていただいた。